

# ARITHMÉTIQUE DANS L'ENSEMBLE $\mathbb{N}$

Cours et exercices – fiche élève

*Tronc Commun (1ère année du lycée) – Maroc*

|                  |                         |
|------------------|-------------------------|
| <b>Partie I</b>  | Cours (fiche élève)     |
| <b>Partie II</b> | Exercices (fiche élève) |

**Notation :**  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  et  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

# PARTIE I – COURS

## 0. Objectifs et prérequis

À la fin du chapitre, tu sauras :

- reconnaître et utiliser les multiples et les diviseurs, et les critères de divisibilité ;
- effectuer et exploiter une division euclidienne ;
- reconnaître un nombre premier et décomposer un entier en facteurs premiers ;
- calculer le PGCD et le PPCM de deux, puis de trois entiers ;
- résoudre des problèmes concrets (partages, rencontres périodiques).

**Prérequis :** tables de multiplication, division posée, puissances, ordre dans  $\mathbb{N}$ .

## 1. Activité d'introduction

### Activité

**Problème.** Un pâtissier a 84 msemmen et 126 baghrir. Il veut préparer des assiettes identiques, avec le même nombre de msemmen et le même nombre de baghrir dans chaque assiette, sans rien laisser de côté. Combien d'assiettes peut-il préparer ? Quel est le nombre maximal d'assiettes ?

1) Peut-il faire 2 assiettes ? 5 assiettes ? 6 assiettes ?

2) Que doit vérifier le nombre d'assiettes par rapport à 84 et 126 ?

👉 On reviendra sur ce problème à la fin du §5 (réponse : 42 assiettes).

## 2. Multiples et diviseurs

### 2.1 Définition

#### Définition

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels avec  $b \neq 0$ . On dit que  **$b$  divise  $a$**  (ou que  **$a$  est un multiple de  $b$** ) s'il existe un entier naturel  $k$  tel que  **$a = b \times k$** . Notation :  **$b \mid a$** .

#### Exemples

- $7 \mid 56$  car  $56 = 7 \times 8$ .
- 5 ne divise pas 23, car il n'existe aucun entier  $k$  tel que  $5k = 23$ .
- Pour tout  $n \neq 0$  :  $1 \mid n$ ,  $n \mid n$  et  $n \mid 0$  (car  $0 = n \times 0$ ).

#### Attention

« 7 divise 56 » veut dire que 7 est un **diviseur** de 56. « 56 est divisible par 7 » dit la même chose. Ne confonds pas diviseur (le petit) et multiple (le grand).

### 2.2 Ensemble des diviseurs

**Exemple : les diviseurs de 36.** On teste les entiers de 1 jusqu'à 6 (car  $6 \times 6 = 36$ ). Chaque diviseur trouvé donne son « partenaire » :

| d           | 1  | 2  | 3  | 4 | 6 |
|-------------|----|----|----|---|---|
| $36 \div d$ | 36 | 18 | 12 | 9 | 6 |

D'où  $D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ .

## 2.3 Propriétés

Soient  $a, b, c, d$  des entiers naturels,  $d \neq 0$ .

- **Transitivité** : si  $a \mid b$  et  $b \mid c$ , alors  $a \mid c$ .
- **Somme** : si  $d \mid a$  et  $d \mid b$ , alors  $d \mid (a + b)$ .
- **Différence** : si  $d \mid a$  et  $d \mid b$  avec  $a \geq b$ , alors  $d \mid (a - b)$ .
- **Multiple** : si  $d \mid a$ , alors  $d \mid (a \times m)$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .

**Démonstration de la propriété « somme ».**  $d \mid a$  donc  $a = d \times k$ , et  $d \mid b$  donc  $b = d \times k'$ . Alors  $a + b = dk + dk' = d(k + k')$  avec  $k + k' \in \mathbb{N}$ . Donc  $d \mid (a + b)$ . ■

## 2.4 Critères de divisibilité

| Par... | Critère                                                                                                                                  | Exemple                        |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| 2      | le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8                                                                                                | 1 374 ✓                        |
| 5      | le chiffre des unités est 0 ou 5                                                                                                         | 3 485 ✓                        |
| 10     | le chiffre des unités est 0                                                                                                              | 720 ✓                          |
| 3      | la somme des chiffres est divisible par 3                                                                                                | 2 145 : $2+1+4+5 = 12$ ✓       |
| 9      | la somme des chiffres est divisible par 9                                                                                                | 7 281 : $7+2+8+1 = 18$ ✓       |
| 4      | le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4                                                                       | 1 316 : $16$ ✓                 |
| 11     | (somme des chiffres de rang impair) – (somme des chiffres de rang pair) est divisible par 11 (on compte les rangs à partir de la droite) | 2 728 : $(8+7) - (2+2) = 11$ ✓ |

**Pourquoi le critère de 3 et de 9 marche ?**  $2\ 145 = 2 \times 1000 + 1 \times 100 + 4 \times 10 + 5 = 2 \times (999+1) + 1 \times (99+1) + 4 \times (9+1) + 5 = (\text{un multiple de } 9) + (2+1+4+5)$ . Le reste ne dépend donc que de la somme des chiffres.

## 3. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$



### Activité

Une salle de classe a 200 chaises à ranger par rangées de 12. Combien de rangées complètes ? Combien de chaises restent-elles ?

On trouve 16 rangées, car  $12 \times 16 = 192$ , et il reste 8 chaises. On écrit :  $200 = 12 \times 16 + 8$ .



### Définition

**Théorème (admis).** Soient  $a \in \mathbb{N}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$ . Il existe un **unique** couple  $(q, r)$  d'entiers naturels tel que  $a = b \times q + r$  avec  $0 \leq r < b$ .

$a$  : dividende ;  $b$  : diviseur ;  $q$  : quotient ;  $r$  : reste.

### Remarques essentielles

- Le reste est **strictement plus petit** que le diviseur : c'est ce qui garantit l'unicité.
- $b \mid a \Leftrightarrow r = 0$ .
- Dans une division par  $b$ , les restes possibles sont  $0, 1, \dots, b - 1$  (donc  $b$  valeurs).

### Exemples résolus

**Exemple 1.** Division euclidienne de 1 234 par 25. On a  $25 \times 49 = 1\ 225$  et  $1\ 234 - 1\ 225 = 9$ , donc  $1\ 234 = 25 \times 49 + 9$  avec  $9 < 25$  ✓.

**Exemple 2.** Le diviseur est 17, le quotient 9 et le reste 11. Dividende :  $a = 17 \times 9 + 11 = 153 + 11 = 164$ .

**Exemple 3.** Dans une division euclidienne par 8, le quotient est égal au reste. On pose  $a = 8q + q = 9q$  avec  $q < 8$  (car  $r = q < 8$ ). Donc  $a \in \{0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63\}$ .

**Exemple 4.** Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est pair. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On divise  $n$  par 2 :  $n = 2k$  ou  $n = 2k + 1$ .

- Si  $n = 2k$  :  $n(n+1) = 2k(n+1)$  est pair.
- Si  $n = 2k + 1$  :  $n + 1 = 2(k+1)$ , donc  $n(n+1) = n \times 2(k+1)$  est pair. ■

## 4. Nombres premiers

### 4.1 Définition



#### Définition

Un entier naturel  $p$  est **premier** s'il a **exactement deux diviseurs** : 1 et lui-même.

- 0 et 1 ne sont pas premiers (0 a une infinité de diviseurs, 1 n'en a qu'un).
- 2 est le **seul nombre premier pair**.
- Nombres premiers inférieurs à 50 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

### 4.2 Le crible d'Ératosthène (activité)

Sur une grille de 1 à 100 : (1) barre 1 ; (2) entoure 2 puis barre tous ses multiples ; (3) entoure le premier nombre non barré (3) et barre ses multiples ; (4) continue avec 5, puis 7 ; (5) les nombres non barrés sont premiers.

**Question** : pourquoi peut-on s'arrêter à 7 ? (Réponse : car  $11^2 = 121 > 100$ .)

### 4.3 Test de primalité



#### À retenir

**Propriété.** Si un entier  $n \geq 2$  n'est pas premier, alors il admet un diviseur premier  $p$  tel que  $p^2 \leq n$ .

**Conséquence** : pour savoir si  $n$  est premier, on teste la divisibilité par les nombres premiers  $p$  tels que  $p^2 \leq n$ . Si aucun ne divise  $n$ , alors  $n$  est premier.

**Exemple** : **137 est-il premier ?**  $11^2 = 121 \leq 137 < 169 = 13^2$ . On teste 2, 3, 5, 7, 11 :

- 2 : 137 est impair ✗ ; 3 :  $1+3+7 = 11$  ✗ ; 5 : se termine par 7 ✗
- 7 :  $7 \times 19 = 133$ , reste 4 ✗ ; 11 :  $11 \times 12 = 132$ , reste 5 ✗

Aucun ne divise 137, donc **137 est premier**.

### 4.4 Décomposition en facteurs premiers



#### À retenir

**Théorème (admis).** Tout entier  $n \geq 2$  s'écrit comme produit de nombres premiers, et cette écriture est **unique** à l'ordre des facteurs près.

**Méthode** : on divise successivement par les plus petits nombres premiers possibles.

**Exemple** : **360**.  $360 \div 2 = 180$  ;  $180 \div 2 = 90$  ;  $90 \div 2 = 45$  ;  $45 \div 3 = 15$  ;  $15 \div 3 = 5$  ;  $5 \div 5 = 1$ .  
Donc  **$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$** .

**Nombre de diviseurs.** Si  $n = p_1^\alpha \times p_2^\beta \times \dots$ , alors  $n$  a  $(\alpha+1)(\beta+1)\dots$  diviseurs. Pour 360 :  $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$  diviseurs.

## 4.5 Il y a une infinité de nombres premiers (Euclide)

Supposons qu'il n'y en ait qu'un nombre fini :  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Posons  $N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$ .  $N$  n'est divisible par aucun  $p_i$  (le reste serait 1). Mais  $N$  admet un diviseur premier, qui serait donc différent de tous les  $p_i$  : contradiction. ■

## 5. PGCD et PPCM

### 5.1 PGCD de deux nombres

#### Définition

Le **PGCD** de  $a$  et  $b$  (entiers non nuls), noté **PGCD( $a, b$ )**, est le plus grand entier qui divise à la fois  $a$  et  $b$ .

**Retour à l'activité.**  $D(84) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$  et  $D(126) = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126\}$ . Diviseurs communs :  $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ . Donc **PGCD(84, 126) = 42** : le pâtissier prépare au maximum **42 assiettes**, chacune avec 2 msemmen et 3 baghrir.

### 5.2 Méthode 1 : décomposition en facteurs premiers

#### ★ À retenir

**PGCD** = produit des facteurs premiers **communs**, chacun avec le **plus petit** exposant.

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$  et  $126 = 2 \times 3^2 \times 7$ .  $\text{PGCD} = 2^1 \times 3^1 \times 7^1 = 42$  ✓.

### 5.3 Méthode 2 : algorithme d'Euclide

**Principe** : si  $a = bq + r$ , alors **PGCD( $a, b$ ) = PGCD( $b, r$ )**. En effet, tout diviseur commun de  $a$  et  $b$  divise  $r = a - bq$ , et réciproquement tout diviseur commun de  $b$  et  $r$  divise  $a = bq + r$  : les deux paires ont les mêmes diviseurs communs.

**Exemple** : **PGCD(252, 198)**

| Division    | Écriture                  |
|-------------|---------------------------|
| 252 par 198 | $252 = 198 \times 1 + 54$ |
| 198 par 54  | $198 = 54 \times 3 + 36$  |
| 54 par 36   | $54 = 36 \times 1 + 18$   |
| 36 par 18   | $36 = 18 \times 2 + 0$    |

Le PGCD est le **dernier reste non nul** : **PGCD(252, 198) = 18**. Cette méthode est rapide pour les grands nombres, sans décomposer.

### 5.4 Nombres premiers entre eux

#### Définition

$a$  et  $b$  sont **premiers entre eux** si  $\text{PGCD}(a, b) = 1$ .

**Exemple** :  $15 = 3 \times 5$  et  $28 = 2^2 \times 7$  sont premiers entre eux, alors qu'aucun des deux n'est premier. **Application** : une fraction  $a/b$  est irréductible si  $\text{PGCD}(a, b) = 1$ . Pour simplifier  $252/198$ , on divise par 18 :  $252/198 = 14/11$ .

### 5.5 PPCM de deux nombres

#### Définition

Le **PPCM** de a et b (non nuls), noté **PPCM(a, b)**, est le plus petit multiple **non nul** commun à a et b.

**Exemple : PPCM(12, 18).** Multiples de 12 : 12, 24, **36**, 48... Multiples de 18 : 18, **36**, 54... Donc **PPCM(12, 18) = 36**.

★ **À retenir**

**Par décomposition :** PPCM = produit de **tous** les facteurs premiers (communs ou non), chacun avec le **plus grand** exposant.

$12 = 2^2 \times 3$  et  $18 = 2 \times 3^2$ , donc  $\text{PPCM} = 2^2 \times 3^2 = 36$  ✓.

## 5.6 Relation fondamentale (pour deux nombres)

★ **À retenir**

$\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = a \times b$ , donc  $\text{PPCM}(a, b) = (a \times b) \div \text{PGCD}(a, b)$ .

**Pourquoi ?** Si  $\text{PGCD}(a, b) = d$ , on écrit  $a = d \times a'$  et  $b = d \times b'$  avec  $a'$  et  $b'$  premiers entre eux. Le PPCM vaut  $d \times a' \times b'$ . En multipliant  $a \times b$ , on compte le facteur commun d **deux fois** ; en divisant par d, on ne le compte qu'**une fois**.

**Exemple :**  $\text{PGCD}(120, 180) = 60$ , donc  $\text{PPCM}(120, 180) = (120 \times 180) \div 60 = 21\,600 \div 60 = \mathbf{360}$ .

**Astuce :** pour éviter les grands nombres, on divise d'abord :  $(120 \div 60) \times 180 = 2 \times 180 = 360$ .

## 5.7 PGCD et PPCM de trois nombres

Le principe est le même qu'avec deux nombres. On prend l'exemple :  $\mathbf{120 = 2^3 \times 3 \times 5}$  ;  $\mathbf{180 = 2^2 \times 3^2 \times 5}$  ;  $\mathbf{252 = 2^2 \times 3^2 \times 7}$ .

|             | Facteurs premiers retenus                | Exposant choisi      | Résultat                                             |
|-------------|------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------------------|
| <b>PGCD</b> | uniquement ceux <b>communs aux trois</b> | le <b>plus petit</b> | $2^2 \times 3 = \mathbf{12}$                         |
| <b>PPCM</b> | <b>tous</b> ceux qui apparaissent        | le <b>plus grand</b> | $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = \mathbf{2\,520}$ |

**Détail du PGCD :** 2 apparaît dans les trois (exposants 3, 2, 2 : on garde 2) ; 3 aussi (exposants 1, 2, 2 : on garde 1) ; 5 manque dans 252 et 7 manque dans 120 et 180 : on les écarte.

**Détail du PPCM :** 2 (exposants 3, 2, 2 : on garde 3) ; 3 (exposants 1, 2, 2 : on garde 2) ; 5 (on garde 1) ; 7 (on garde 1).

**Méthode en deux étapes :**  $\text{PGCD}(a, b, c) = \text{PGCD}(\text{PGCD}(a, b), c)$  et  $\text{PPCM}(a, b, c) = \text{PPCM}(\text{PPCM}(a, b), c)$ .

- $\text{PGCD}(120, 180) = 60$ , puis  $\text{PGCD}(60, 252) = 12$  ✓.
- $\text{PPCM}(120, 180) = 360$ , puis  $\text{PPCM}(360, 252) = (360 \times 252) \div 36 = 2\,520$  ✓ (car  $\text{PGCD}(360, 252) = 36$ ).

⚠ **Attention**

Pour **trois** nombres, la relation  $\text{PGCD} \times \text{PPCM} = a \times b \times c$  est **fausse**. Exemple :  $12 \times 2\,520 = 30\,240$ , alors que  $120 \times 180 \times 252 = 5\,443\,200$ . On n'utilise la formule qu'à chaque étape à **deux** nombres.

## 6. Problèmes types

---

**Problème A (PGCD : partage).** Un menuisier veut découper une planche de 240 cm sur 180 cm en carrés identiques, sans perte, les plus grands possibles. Le côté doit diviser 240 et 180 et être maximal :  $\text{PGCD}(240, 180) = 60$ . Les carrés mesurent **60 cm** ( $4 \times 3 = 12$  carrés).

**Problème B (PPCM : rencontre périodique).** Deux bus partent ensemble de la gare à 8 h. L'un passe toutes les 12 min, l'autre toutes les 18 min.  $\text{PPCM}(12, 18) = 36$  : ils repartent ensemble à **8 h 36**.

**Problème C (trois nombres).** Trois feux clignotent toutes les 6, 8 et 10 secondes.  $\text{PPCM}(6, 8, 10) = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$  : ils clignotent ensemble toutes les **120 secondes**.

**Comment reconnaître le type de problème ?** « Partager en parts égales / découper le plus grand possible » → **PGCD**. « Se retrouver ensemble / la prochaine fois » → **PPCM**.

## 7. Ouverture : les congruences (pour aller plus loin)

---

a et b sont **congrus modulo n** ( $a \equiv b [n]$ ) s'ils ont le même reste dans la division euclidienne par n. Exemple :  $23 \equiv 3 [5]$  car  $23 = 5 \times 4 + 3$ .

**Application :** chiffre des unités de  $7^{2026}$ . Les unités de  $7^n$  se répètent : 7, 9, 3, 1 (période 4). Comme  $2026 = 4 \times 506 + 2$ , c'est le 2<sup>e</sup> du cycle : **9**.

## PARTIE II – EXERCICES

### Série A : application directe

---

1. Dire si 1 548 est divisible par 2, 3, 4, 5, 9, 11.
2. Écrire la division euclidienne de 2 026 par 37.
3. Décomposer 756 et 1 100 en facteurs premiers.
4. Calculer PGCD(168, 126) par l'algorithme d'Euclide, puis PPCM(168, 126).
5. 223 est-il premier ? Justifier.

### Série B : raisonnement

---

6. Dans une division euclidienne, le dividende est 345 et le quotient 14. Trouver les diviseurs possibles.
7. Montrer que si  $n$  est impair, alors  $n^2 - 1$  est divisible par 8. (Indication :  $n = 2k + 1$ , puis le produit de deux entiers consécutifs.)
8. Trouver les entiers naturels  $n$  tels que  $(n + 3)$  divise 12.
9. Le PGCD de deux nombres est 12 et leur PPCM est 180. L'un des nombres est 36. Trouver l'autre.

### Série C : problèmes

---

10. Une boulangère a 150 gâteaux au miel et 210 cornes de gazelle. Elle veut faire des boîtes identiques sans reste. Quel est le nombre maximal de boîtes et que contient chacune ?
11. Trois feux clignent toutes les 6, 8 et 10 secondes. Ils clignent ensemble à  $t = 0$ . Quand clignoteront-ils de nouveau ensemble ?

### Série D : PGCD et PPCM de trois nombres

---

12. Calculer PGCD(48, 72, 120) et PPCM(48, 72, 120).
13. Calculer PGCD(90, 150, 210) et PPCM(90, 150, 210).
14. Trois cordes de 84 m, 126 m et 210 m sont découpées en morceaux de même longueur, la plus grande possible. Quelle est cette longueur ? Combien de morceaux obtient-on en tout ?