

CALCUL VECTORIEL DANS LE PLAN

Tronc Commun Scientifique – Maroc Fiche élève : cours, méthodes, exercices et corrigés

1. Égalité, opposé et relation de Chasles

- Parallélogramme : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à dire que $ABCD$ est un parallélogramme.
- Opposé : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.
- **Relation de Chasles** : pour tous points A, B, C du plan, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

2. Produit d'un vecteur par un réel

- $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ et $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$.
- $k\vec{u} = \overrightarrow{0} \iff k = 0$ ou $\vec{u} = \overrightarrow{0}$.

3. Colinéarité, parallélisme et alignement

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
- $(AB) \parallel (CD) \iff \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ (avec $A \neq B$ et $C \neq D$).
- A, B, C alignés $\iff \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (avec $A \neq B$).

4. Milieu d'un segment

- I est le **milieu de** $[AB]$ $\iff \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ (ou $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$).
- Pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

5. Méthodes types

Je dois montrer que...	Je fais...
A, B, C sont alignés	Chasles pour exprimer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis je trouve k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ ($A \neq B$).
$(AB) \parallel (CD)$	Je trouve k tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.
$ABCD$ est un parallélogramme	Je montre que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
I est le milieu de $[AB]$	Je montre que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.
Simplifier une somme	J'introduis un point commun, je remplace $-\overrightarrow{XY}$ par $\overrightarrow{YX}$, je regroupe.

6. Erreurs fréquentes

- Écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$: en réalité $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
- Confondre le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la longueur AB .
- Conclure « égaux » alors que les vecteurs sont seulement colinéaires ($k \neq 1$).
- Prouver un alignement avec $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ sans vérifier que $A \neq B$.

7. Exercices

- Exercice 1.** Simplifier $U = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ et $V = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{MB}$.
- Exercice 2.** ABC est un triangle. E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}$. Montrer que C , E et F sont alignés.
- Exercice 3.** Dans un triangle ABC , M et N vérifient $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Montrer que $(MN) \parallel (BC)$.
- Exercice 4.** ABC est un triangle, I le milieu de $[BC]$ et G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.
- Exercice 5.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires. Déterminer m pour que $\vec{a} = 3\vec{u} - 4\vec{v}$ et $\vec{b} = -6\vec{u} + m\vec{v}$ soient colinéaires.

8. Corrigés (à consulter après avoir cherché)

- $U = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$. $V = 2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
- $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB} = -6\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{CE}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires et ont C en commun : C , E , F sont alignés.
- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. Donc $(MN) \parallel (BC)$.
- $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$, donc $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$, soit $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AI} = \vec{0}$, d'où $3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AI}$ et $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}}$.
- $\vec{b} = k\vec{a}$ avec $k = -6 \div 3 = -2$, donc $\vec{b} = -6\vec{u} + 8\vec{v}$ et $\boxed{m = 8}$.