

1. Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Définitions et inclusions

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ $\mathbb{Z}$: entiers relatifs $\mathbb{D}$: décimaux $\frac{a}{10^n}$ ($a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$) $\mathbb{Q}$: rationnels $\frac{p}{q}$
 ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$).
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2. Décimaux, rationnels, irrationnels

Reconnaître un nombre

Fraction irréductible $\frac{p}{q}$ décimale $\iff q$ n'a que les facteurs premiers 2 et 5 : $\frac{7}{20}$ est décimal ; $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}$ ne le sont pas.
 Rationnel $\iff$ écriture décimale finie ou périodique. Fraction d'un périodique : $x = 0,2727\dots \Rightarrow 100x - x = 27 \Rightarrow x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.
 Irrationnel : réel non rationnel ($\sqrt{2}, \pi$). Pour $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \iff n$ carré parfait.

Preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ irréductible : $p^2 = 2q^2 \Rightarrow p$ pair $\Rightarrow q$ pair : contradiction.

3. Puissances

$a^n = a \times \dots \times a$; $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$) ; $a^m a^n = a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(ab)^n = a^n b^n$.
 Écriture scientifique : $4\,500\,000 = 4,5 \times 10^6$; $0,0005 = 5 \times 10^{-4}$.

4. Racines carrées et identités remarquables

À connaître

$a \geq 0$: $(\sqrt{a})^2 = a$; pour tout réel x : $\sqrt{x^2} = |x|$. $a, b \geq 0$: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; $b > 0$: $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$.
 Rationaliser : $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$; $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$.
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Attention. $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$.

5. Exercices

Exercice 1. (*Appartenance*) Donner le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ contenant : -5 ; $0,75$; $\frac{4}{3}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{49}$.

Exercice 2. (*Fractions*) 1) Montrer que $\frac{7}{20}$ est décimal. 2) $\frac{5}{6}$ est-il décimal ? 3) Écrire $0,4545\dots$ sous forme de fraction irréductible.

Exercice 3. (*Irrationalité*) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 4. (*Puissances*) Calculer $A = \frac{2^3 \times 3^2}{2^5 \times 3}$; $B = 5^{-2} \times 5^4$; $C = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

Exercice 5. (*Racines*) 1) Simplifier $\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{8}$. 2) Rationaliser $\frac{3}{\sqrt{5}}$. 3) Rationaliser $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$.

Exercice 6. (*Identités*) 1) Développer $(2x - 3)^2$. 2) Factoriser $9x^2 - 16$. 3) Calculer $101^2 - 99^2$.

6. Devoir surveillé n°1 (1 h, 20 points)

Exercice 1 (5 pts). 1) Plus petit ensemble contenant -3 ; $0,6$; $\frac{2}{7}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{36}$. 2) Écrire $\frac{1}{8}$ sous forme décimale. 3) Écrire $0,666\dots$ sous forme de fraction.

Exercice 2 (5 pts). Soit $a = \sqrt{2} + 1$. 1) Calculer a^2 . 2) En déduire $a^2 - 2a - 1 = 0$. 3) Montrer que $\frac{1}{a} = \sqrt{2} - 1$.

Exercice 3 (5 pts). Fractions irréductibles : 1) $\frac{3^4 \times 2^{-3}}{3^2 \times 2}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 2^{-2}$. 3) Écrire $0,0005$ sous la forme $a \times 10^n$.

Exercice 4 (5 pts). 1) Développer et réduire $(x + 3)^2 - (x - 3)^2$. 2) Rationaliser $\frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$. 3) Calculer $(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})$.