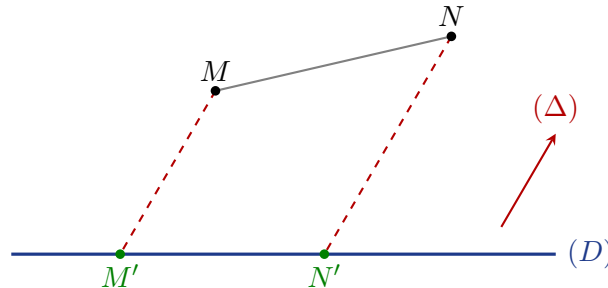


1. Définition

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes. Le **projeté** d'un point M sur (D) parallèlement à (Δ) est le point M' tel que $M' \in (D)$ et $(MM') \parallel (\Delta)$.



- **Point invariant** : si $M \in (D)$, alors $M' = M$.
- **Projection orthogonale** : lorsque $(\Delta) \perp (D)$, M' est le projeté orthogonal de M sur (D) .

2. Propriétés

Conservation du milieu

Le projeté du milieu I de $[AB]$ est le milieu I' de $[A'B']$.

Conservation du coefficient de colinéarité

Si A', B', C', D' sont les projetés de A, B, C, D et si $\overrightarrow{CD} = k \overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{C'D'} = k \overrightarrow{A'B'}$.
 En particulier, pour A, B, C alignés avec (AB) non parallèle à (Δ) (donc $A' \neq B'$) : $\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}$ (Thalès).

Réciproque (sous condition)

Si $\overrightarrow{A'M'} = k \overrightarrow{A'B'}$ et $M \in (AB)$ avec (AB) non parallèle à (Δ) , alors $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$.

Attention. La projection ne conserve *pas* les longueurs : elle conserve le milieu et le coefficient k .

Méthode type. On repère la droite (D) sur laquelle doit apparaître la relation finale, la direction (Δ) est celle des parallèles de l'énoncé ; on cherche alors les projetés des points utiles (souvent $p(A) = A$ et $p(B) = C$).

3. Exercices

- Exercice 1.** (*Projetés dans un triangle*) Soit ABC un triangle. On considère la projection p sur (BC) parallèlement à (AB) . Déterminer $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, puis le projeté du milieu I de $[AC]$.
- Exercice 2.** (*Conservation du coefficient*) Soit ABC un triangle et M le point tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N . Montrer que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
- Exercice 3.** (*Trapèze*) Soit $ABCD$ un trapèze de bases (AB) et (CD) , I le milieu de $[AD]$. La parallèle à (AB) passant par I coupe $[BC]$ en J . Montrer que J est le milieu de $[BC]$.
- Exercice 4.** (*Parallélisme*) Soit ABC un triangle, $E \in (AB)$ tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $F \in (BC)$ tel que $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. Montrer que $(EF) \parallel (AC)$.
- Exercice 5.** (*Projection orthogonale*) Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC) . Déterminer les projetés orthogonaux des segments $[AB]$ et $[AC]$ sur (BC) .
- Exercice 6.** (*Construction*) Soit ABC un triangle et M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. Construire le projeté M' de M sur (AC) parallèlement à (BC) et calculer AM' si $AC = 10$ cm.

4. Devoir surveillé n°1 (1 h, 20 points)

- Exercice 1** (5 pts). ABC est un triangle, $M \in (AB)$ tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N . 1) Déterminer les projetés de A , B , M sur (AC) parallèlement à (BC) . 2) En déduire que $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
- Exercice 2** (5 pts). $ABCD$ est un parallélogramme de centre O , I le milieu de $[AB]$. La parallèle à (BD) passant par I coupe (AC) en J . Montrer que J est le milieu de $[AO]$.
- Exercice 3** (5 pts). ABC est un triangle, E tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et F le projeté de E sur (AB) parallèlement à (AC) . 1) Montrer que $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$. 2) En déduire que $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
- Exercice 4** (5 pts). Dans l'exercice précédent, soit $K \in (AC)$ tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Montrer, en utilisant la réciproque, que $(FK) \parallel (BC)$.