

1. Ordre et opérations

Comparer, additionner, multiplier

$a \leq b \iff b - a \geq 0$: comparer, c'est étudier le signe de la différence.

Addition : $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$; si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

Multiplication : si $c > 0$, $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$; si $c < 0$, $a \leq b \Rightarrow ac \geq bc$ (l'ordre s'inverse).

Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.

Carrés, racines, inverses

Pour $a, b \geq 0$: $a \leq b \iff a^2 \leq b^2 \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$. Si $0 < a \leq b$: $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

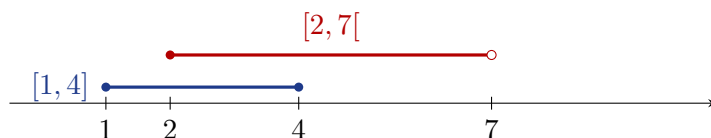
Pour tous réels a, b : $a^2 + b^2 \geq 2ab$, car $(a - b)^2 \geq 0$.

2. Intervalles

$x \in [a, b] \iff a \leq x \leq b$; $x \in]a, b[\iff a < x < b$; $x \in]-\infty, a] \iff x \leq a$.

Intersection $I \cap J$: $x \in I$ et $x \in J$. **Réunion** $I \cup J$: $x \in I$ ou $x \in J$.

Exemple : $[1, 4] \cap [2, 7[= [2, 4]$ et $] -\infty, 2[\cup [1, 5] =] -\infty, 5]$.



3. Valeur absolue

$|x| = x$ si $x \geq 0$; $|x| = -x$ si $x < 0$. Donc $|x| \geq 0$ et $|x| = \sqrt{x^2}$. $|xy| = |x||y|$.

Inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$. $|x| = |y| \iff x = y$ ou $x = -y$. Distance de x à y : $|x - y|$.

Résoudre ($r \geq 0$)

$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r \iff x \in [a - r, a + r]$.

$|x - a| \geq r \iff x \leq a - r$ ou $x \geq a + r$. $|x - a| = r \iff x = a - r$ ou $x = a + r$.

4. Encadrement et valeurs approchées

Si $a \leq x \leq b$: encadrement d'amplitude $b - a$; a est une valeur approchée *par défaut*, b *par excès*.

$|x - a| \leq \varepsilon$: a approche x à ε près.

Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$: $a + c \leq x + y \leq b + d$ et $a - d \leq x - y \leq b - c$ (on croise les bornes).

Attention. Multiplier par un nombre négatif inverse l'ordre ; ne passer au carré ou à l'inverse que pour des nombres de même signe.

5. Exercices

Exercice 1. (*Comparer*) 1) Comparer $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$. 2) Montrer que pour tout réel x : $x^2 + 4 \geq 4x$.

Exercice 2. (*Encadrement*) On sait que $1 \leq x \leq 3$ et $-2 \leq y \leq 4$. Encadrer $x + y$, $x - y$ et $2x - 3y$.

Exercice 3. (*Intervalles*) Soient $A = [-2, 5[$, $B =]1, 8]$ et $C =]-\infty, 3]$. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \cap C$.

Exercice 4. (*Valeur absolue*) Résoudre dans $\mathbb{R}$: 1) $|x - 3| = 5$; 2) $|2x + 1| \leq 7$; 3) $|x - 1| > 2$.

Exercice 5. (*Sans valeur absolue*) 1) Simplifier $A = |\sqrt{5} - 3| + |\sqrt{5} - 2|$. 2) Pour $x \in [1, 3]$, simplifier $B = |x - 3| + |x - 1|$.

Exercice 6. (*Valeur approchée*) On donne $1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$. 1) Encadrer $3\sqrt{2}$. 2) En déduire une valeur approchée de $3\sqrt{2}$ à 0,03 près par défaut.

6. Devoir surveillé n°1 (1 h, 20 points)

Exercice 1 (5 pts). Soient a et b deux réels. 1) Montrer que $a^2 + b^2 \geq 2ab$. 2) En déduire que $(a + b)^2 \geq 4ab$. 3) Pour $a > 0$ et $b > 0$, montrer que $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Exercice 2 (5 pts). Résoudre dans $\mathbb{R}$: 1) $|2x - 4| = 6$; 2) $|x + 2| \leq 3$; 3) $|3x - 1| \geq 5$.

Exercice 3 (5 pts). On donne $-1 \leq x \leq 2$ et $3 \leq y \leq 5$. Encadrer : 1) $x + y$; 2) $x - y$; 3) $\frac{1}{y}$; 4) $2x - y$.

Exercice 4 (5 pts). Soient $I =]-3, 4]$ et $J = [1, 6[$. 1) Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$. 2) Montrer que $x \in [-2, 6] \iff |x - 2| \leq 4$. 3) En déduire que si $|x - 2| \leq 4$ alors $|x + 1| \leq 7$.