

1. Définitions et opérations

Vocabulaire

$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$: *degré* n , *coefficient dominant* a_n . Exemple : $3x^3 - 2x + 5$ est de degré 3.

Deux polynômes sont égaux $\iff$ mêmes coefficients (identification). Le polynôme nul n'a pas de degré.

$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$ ($P, Q \neq 0$). Exemple : $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$.

2. Racines et factorisation

Racine

a racine de $P \iff P(a) = 0 \iff P(x) = (x - a)Q(x)$ avec $\deg Q = \deg P - 1$.

Exemple : $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $P(1) = 0$, donc $P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Une racine entière (coefficients entiers) divise le terme constant a_0 .

3. Division euclidienne

Par $x - a$ et en général

$P(x) = (x - a)Q(x) + R$ où le reste est $R = P(a)$. Exemple : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$, $a = 2$: $R = P(2) = 1$, $Q(x) = 2x^2 + x + 3$.

Schéma de Horner ($a = 2$) : on abaisse 2 ; $-3 + 2 \times 2 = 1$; $1 + 2 \times 1 = 3$; $-5 + 2 \times 3 = 1$.

En général : $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$; A divisible par $B \iff R = 0$.

Exemple : $x^3 + 2x^2 - x + 3 = (x^2 + 1)(x + 2) + (-2x + 1)$.

Attention. Penser au coefficient 0 d'un terme manquant dans Horner ($x^3 - 7x + 6 : 1, 0, -7, 6$) ; si -2 est racine, le facteur est $x + 2$.

4. Exercices

- Exercice 1.** (*Opérations*) $P(x) = 2x^3 - x + 4$, $Q(x) = x^2 + 3x - 1$. 1) Degré et coefficient dominant de P et de Q . 2) Calculer $P + Q$ et $P - Q$. 3) Calculer $P \times Q$.
- Exercice 2.** (*Identification*) Déterminer a, b, c tels que $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ pour tout réel x .
- Exercice 3.** (*Racines*) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. 1) Vérifier que -1 est racine. 2) Factoriser P . 3) En déduire toutes les racines.
- Exercice 4.** (*Division par $x - a$*) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$. 1) Reste de la division par $x - 2$ sans l'effectuer. 2) Déterminer le quotient.
- Exercice 5.** (*Division euclidienne*) Diviser $A(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$ par $B(x) = x^2 + 1$.
- Exercice 6.** (*Paramètres*) Déterminer a, b pour que $P(x) = x^3 + ax + b$ soit divisible par $x - 1$ et par $x + 2$; factoriser P .

5. Devoir surveillé n°3 (1 h, 20 points)

- Exercice 1** (5 pts). $P(x) = x^3 - 7x + 6$. 1) Montrer que 1 est racine. 2) Factoriser $P(x)$. 3) En déduire toutes les racines.
- Exercice 2** (5 pts). $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 7$. 1) Reste de la division par $x - 3$ sans l'effectuer. 2) Effectuer la division. 3) En déduire que $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ est divisible par $x - 3$.
- Exercice 3** (5 pts). Division euclidienne de $A(x) = x^4 + 2x^3 - x + 5$ par $B(x) = x^2 + x + 1$, puis vérification en développant.
- Exercice 4** (5 pts). $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ admet 1 et 2 pour racines. 1) Déterminer a et b . 2) Factoriser $P(x)$.